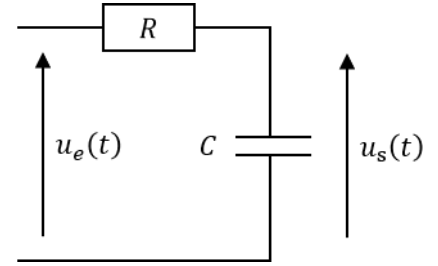


I) Filtre RC soumis à une tension créneau

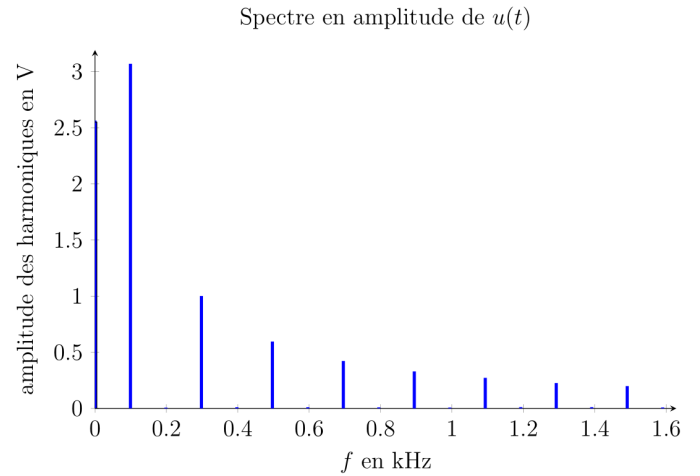
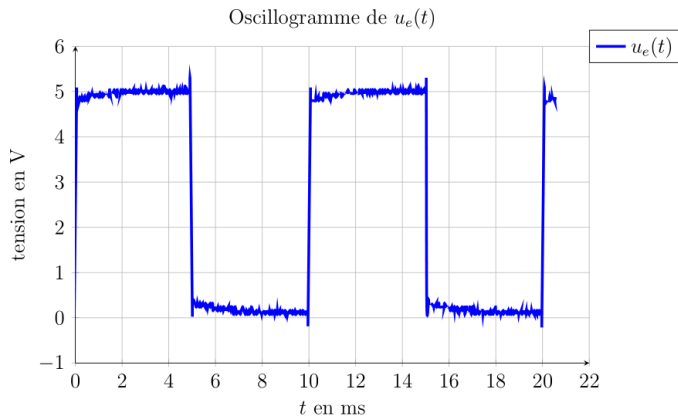
On impose une tension créneau $u_e(t)$, allant de 0 V à 5 V à l'entrée du circuit électronique ci-contre.

On rappelle qu'une tension carrée $u(t)$ d'amplitude 1 V et de valeur moyenne nulle peut être décomposée en série de Fourier par :

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1}$$



On donne l'oscillogramme de $u_e(t)$ et son spectre en amplitude :



1) Donner la décomposition en série de Fourier de $u_e(t)$. L'harmonique de rang n sera noté $u_{en}(t)$ et son amplitude U_{enm} .

Correction

Le créneau possède une valeur moyenne $E = 2,5$ V et également une amplitude $E = 2,5$ V. Sa décomposition en série de Fourier s'écrit donc :

$$u(t) = E + \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin((2k+1)\omega t)}{2k+1} \quad \text{avec : } E = 2,5 \text{ V}$$

2) Donner l'expression du fondamental de $u_e(t)$, exprimer puis calculer son amplitude.

Correction

Le fondamental $n = 1$ correspond donc au cas $k = 0$ de la somme.

$$u_{e1}(t) = \frac{4E}{\pi} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad U_{e1m} = \frac{4E}{\pi} = 3,2 \text{ V}$$

3) Donner l'expression des harmoniques de rang 2 et 3 de $u_e(t)$, exprimer puis calculer leur amplitude.

Correction

Il y a uniquement des harmoniques impaires. Il n'y a donc pas d'harmonique de rang 2.

$$u_{e2}(t) = 0$$

L'harmonique de rang $n = 1$ correspond au cas $k = 1$ de la somme.

$$u_{e3}(t) = \frac{4E}{3\pi} \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad U_{e3m} = \frac{4E}{3\pi} = 1,1 \text{ V}$$

4) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u_s(t)$ donnée par l'équation ci-dessous. Donner l'expression de τ .

$$\tau \frac{du_s}{dt} + u_s(t) = u_e(t)$$

Correction

Loi des mailles :

$$u_e = Ri + u_s = RC \frac{du_s}{dt} + u_s \Rightarrow \boxed{\tau = RC}$$

On se place désormais en régime sinusoïdal pur avec :

$$u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$$

5) À partir de l'équation différentielle, montrer que la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ de ce circuit, qui peut aussi être qualifié de filtre est donnée par l'expression ci-dessous. Donner l'expression de ω_c , la pulsation de coupure du filtre.

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Correction

On passe l'ED en notation complexe :

$$(j\omega\tau + 1) \underline{U}_s = \underline{U}_e \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow \boxed{\omega_c = \frac{1}{\tau}}$$

On se place désormais en régime sinusoïdal pur avec :

$$u_e(t) = U_{em} \cos(\omega t)$$

6) Exprimer le gain en décibel G_{dB} et le déphasage ϕ du filtre.

Correction

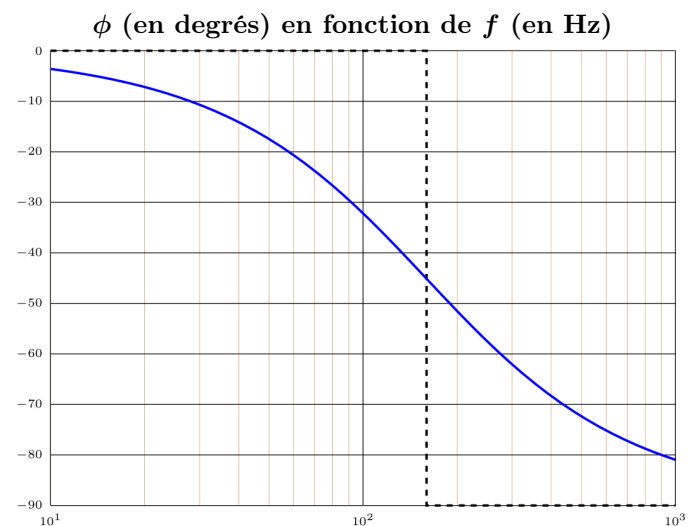
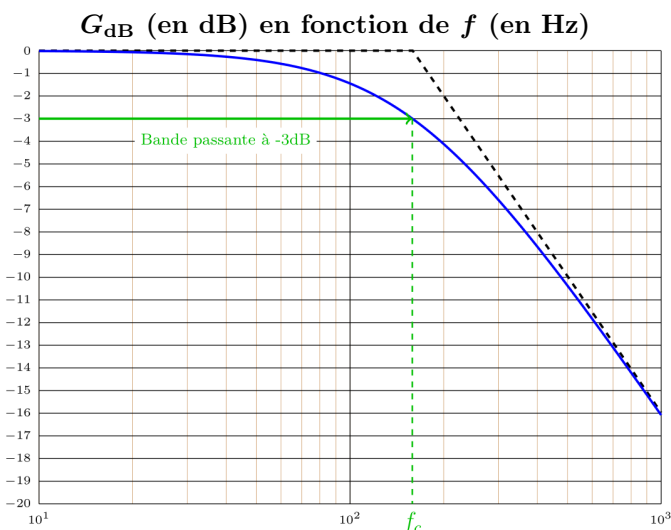
Gain en décibel :

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}\right) = -10 \log\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\right)$$

Déphasage :

$$\boxed{\phi = \arg(\underline{H}) = -\arg(1 + j\omega\tau) = -\arctan(\omega\tau)}$$

Les valeurs des composants sont les suivantes : $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$. Voici le tracé du diagramme de Bode :



7) Exprimer puis calculer la fréquence de coupe f_c du filtre.

Correction

La fréquence de coupure vaut :

$$f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC} = 159 \text{ Hz}$$

8) Trouver l'équation des asymptotes et les tracer.

Correction

Comportement BF :

$$\underline{H} \simeq 1 \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) = 0 \\ \phi = \arg(\underline{H}) = 0 \end{cases}$$

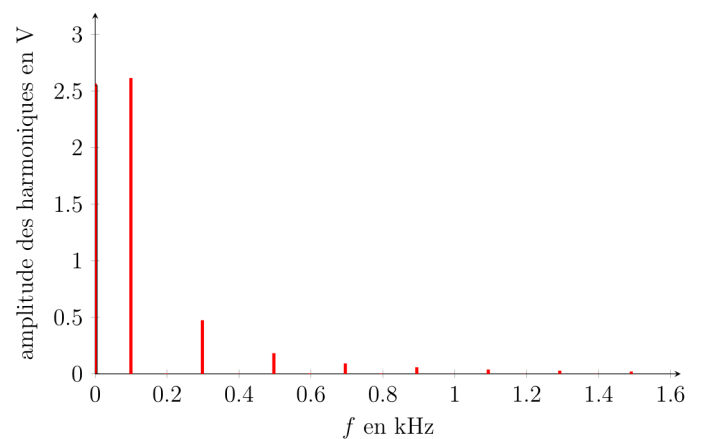
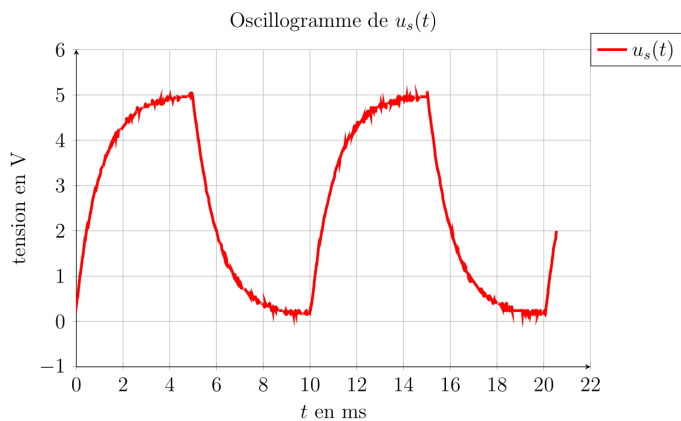
Comportement HF :

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{jx} \quad \text{avec : } x = \frac{\omega}{\omega_c} \Rightarrow \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{1}{x}\right) = -20 \log(x) \\ \phi = \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$G_{\text{dB}} = -20 \log(x)$ correspond à une pente de -20 dB/dcade

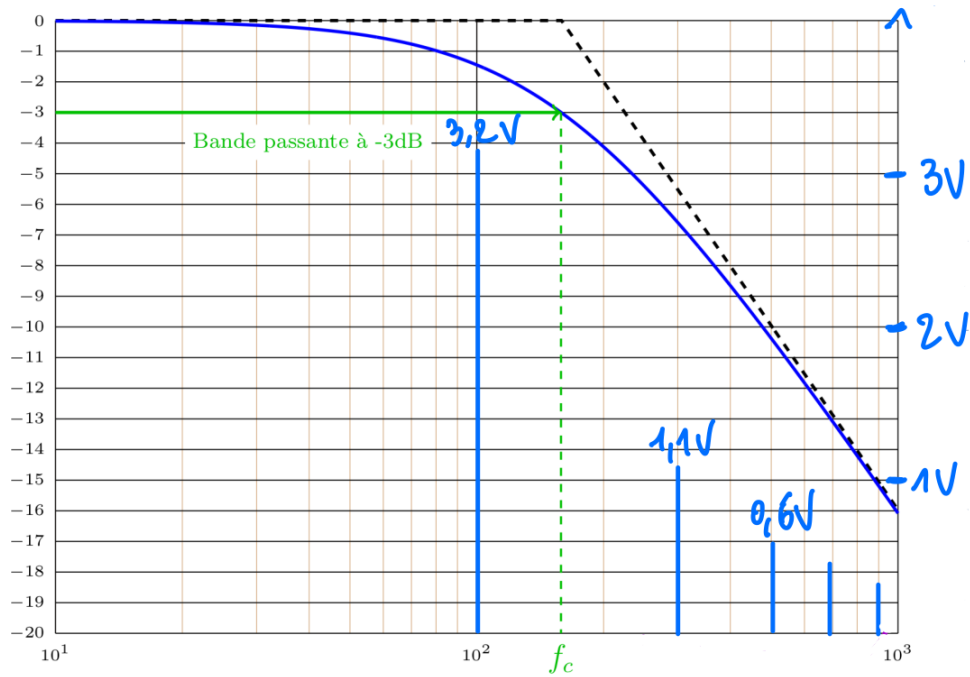
On s'intéresse maintenant au cas où le circuit est alimenté par la tension $u_e(t)$ carrée étudiée en début d'exercice.

On a relevé expérimentalement l'oscillogramme et le spectre de $u_s(t)$:



9) Placer, en superposition sur la courbe de gain, les harmoniques de rang $n \geq 1$ de $u_e(t)$. Les harmoniques de rang $n \geq 3$ de $u_e(t)$ sont-elles efficacement filtrées ? Qu'en est-il de la composante continue de $u_e(t)$?

Correction



La composante continue sur trouve à $-\infty$ tout à gauche. Elle passe sans atténuation.

Les harmoniques de rang $n \geq 3$ sont atténués mais pas totalement coupés.

10) Exprimer puis calculer la composante continue de $u_s(t)$ notée U_{s0} , ainsi que l'amplitude de son fondamental notée U_{s1m} .

Correction

La composante continue n'est pas atténuée :

$$U_{s0} = E = 2,5 \text{ V}$$

Pour le fondamental, on multiplie U_{e1m} par l'amplitude de la fonction de transfert à la fréquence du fondamental.

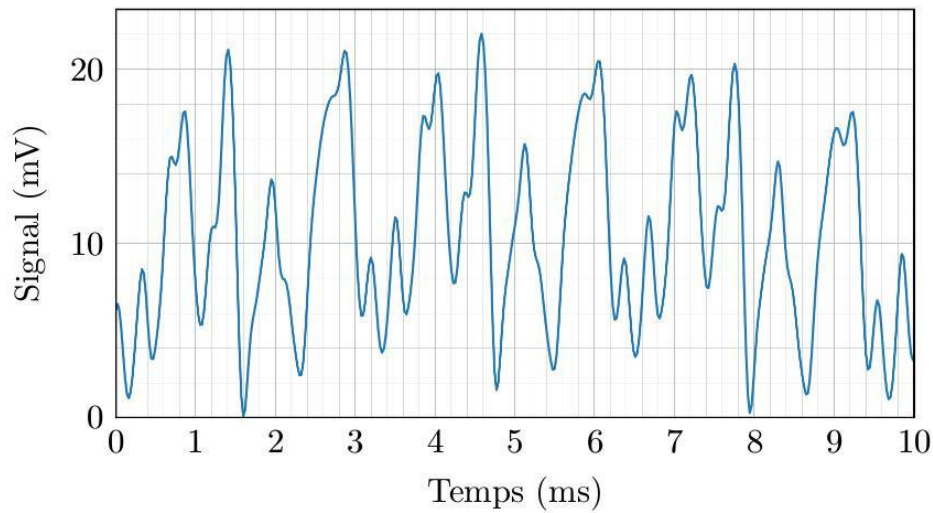
$$U_{s1m} = \underbrace{\frac{4E}{\pi}}_{= 3,2 \text{ V}} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}}}_{= 0,846} = 2,7 \text{ V}$$

II) Accordeur de guitare

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare électrique. L'objectif de ce sujet est, grâce à une série de filtre, d'isoler la fréquence d'une corde légèrement désaccordée. Le principe consistant à réaccorder la corde n'est pas présenté. La corde étudiée est celle du Mi qui, une fois accordée, vibre à la fréquence $f_{ac} = 329,6 \text{ Hz}$.

II.1) Le signal

La figure ci-dessous montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro de la guitare électrique.



11) Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.

Correction

Le signal oscille autour de 10 mV (sa valeur moyenne).

12) Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal, notée f_{co} (on supposera en première approximation que le signal est parfaitement périodique).

Correction

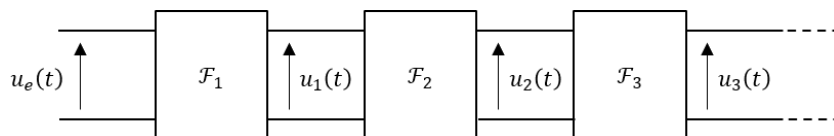
On repère ce qui ressemble à un motif. Il a une période $T = 3,2 \text{ ms}$. Sa fréquence vaut donc : $f_{co} = 3,1 \times 10^2 \text{ Hz}$.

13) L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

Correction

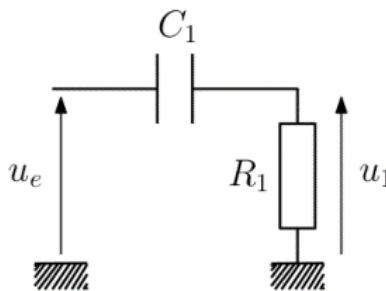
Le signal n'étant pas sinusoïdal, il possédera des harmoniques.

Afin d'isoler la fréquence fondamentale f_{co} , ce signal est injecté dans un circuit comportant 3 filtres en série.



II.2) Premier filtre $\mathcal{F}_1$

Le signal électrique $u_e(t)$ provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre ci-dessous, noté $\mathcal{F}_1$.



14) Exprimer la fonction de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω d'un signal d'entrée supposé harmonique.

Correction

Un pont diviseur de tension donne :

$$\underline{H_1} = \frac{R_1}{R_1 + 1/j\omega C_1} = \frac{j\omega R_1 C_1}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_1}$$

15) Préciser de quel type de filtre s'agit-il (nature et ordre) ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.

Correction

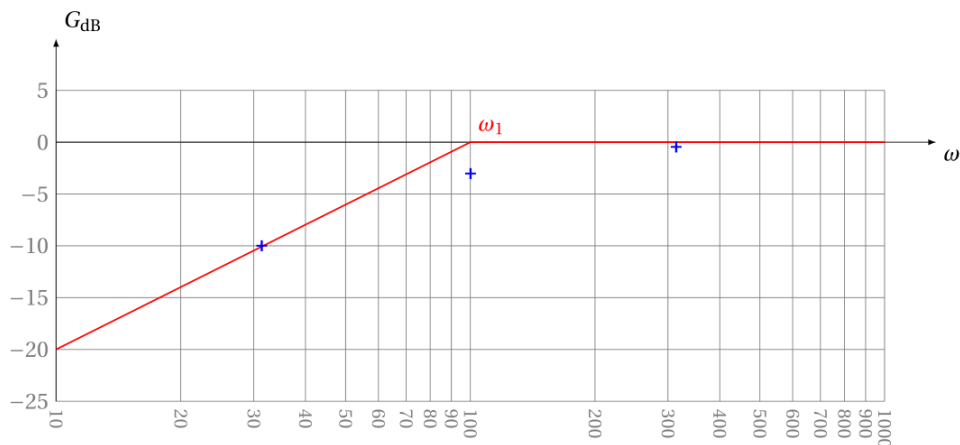
Il s'agit d'un **passé-haut** : car $\underline{H_1}(0) = 0$ et $\underline{H_1}(\infty) = 1$; **d'ordre 1** : car polynôme d'ordre 1 au dénominateur. Sa pulsation caractéristique vaut : $\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1}$.

Cette pulsation est la **pulsation de coupure du filtre**, c'est-à-dire la pulsation qui fait la frontière entre les BF et les HF.

16) On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Tracer, sur votre feuille, l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au gain.

Correction

On a : $\omega_1 = 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ donc $f_1 = 15,9 \text{ Hz}$



17) Quel est le rôle de ce premier filtre ?

Correction

Puisque $f_1 \ll f_{co}$ (fréquence fondamentale du signal), ce filtre permet de couper la composante continue (composante de fréquence nulle).

II.3) Deuxième filtre $\mathcal{F}_2$

En sortie du filtre $\mathcal{F}_1$, le signal $u_1(t)$ est envoyé sur un filtre $\mathcal{F}_2$ dont la fonction de transfert est donnée par :

$$\underline{H_2}(j\omega) = 1 + \frac{G_0}{1 + j\omega/\omega_2} \quad \text{avec : } G_0 = 100 \quad \text{et} \quad \omega_2 = 3,1 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

18) Que vaut le gain de ce filtre en basse fréquence ? Et en haute fréquence ?

Correction

En BF, le gain vaut : $|\underline{H_2}(0)| = 1 + G_0 = 101$. Le gain en haute fréquence vaut : $|\underline{H_2}(\infty)| = 1$.

19) Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à la pulsation ω_2 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

Correction

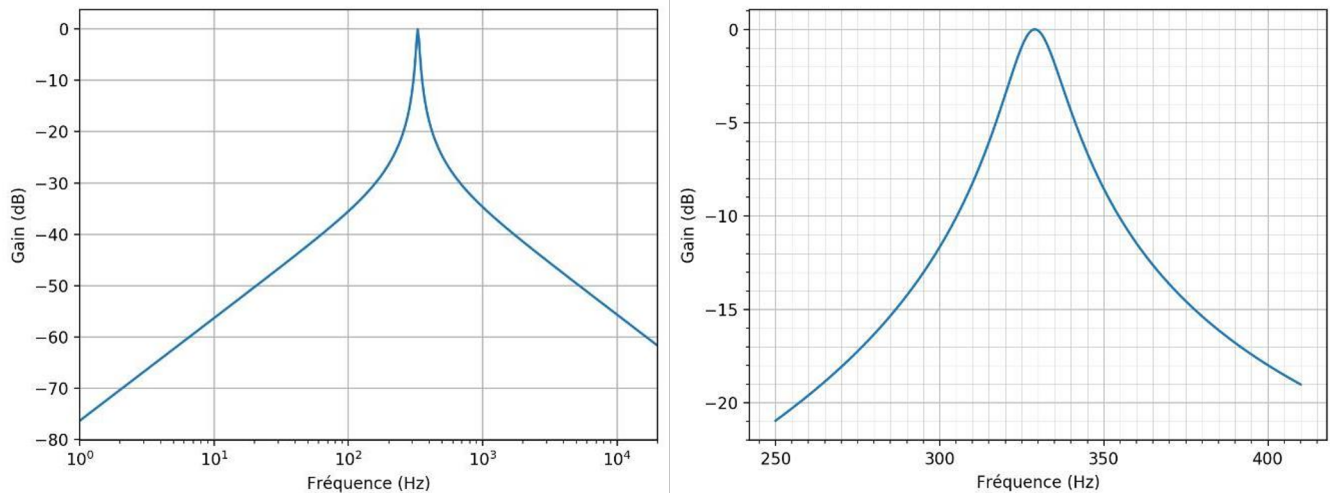
La fréquence caractéristique vaut $f_2 = 500 \text{ Hz}$. Le second filtre, laisse passer toutes les fréquences du spectre, mais

amplifie d'un facteur 100 les fréquences inférieures à 500 Hz (les BF), donc en particulier le fondamental f_{co} .

II.4) Troisième filtre $\mathcal{F}_3$

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal $u_2(t)$, dont la valeur est voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique f_{ac} de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur. Le principe du filtre $\mathcal{F}_3$ est que sa fréquence caractéristique soit égale à celle du signal de référence de fréquence f_{ac} .

La figure ci-dessous représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre $\mathcal{F}_3$ tracé à deux échelles différentes.



20) Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence caractéristique f_3 ?

Correction

Il s'agit d'un filtre passe-bande d'ordre 2 (pentes de ± 20 dB/dec) avec un grand facteur de qualité (résonance très étroite). On peut lire graphiquement $f_3 = 329$ Hz, soit une fréquence très proche de la fréquence que l'on souhaite isolée (f_{ac}).

21) Définir puis déterminer graphiquement la valeur de sa bande-passante à -3 dB.

Correction

La bande passante de ce filtre est l'intervalle de fréquence où :

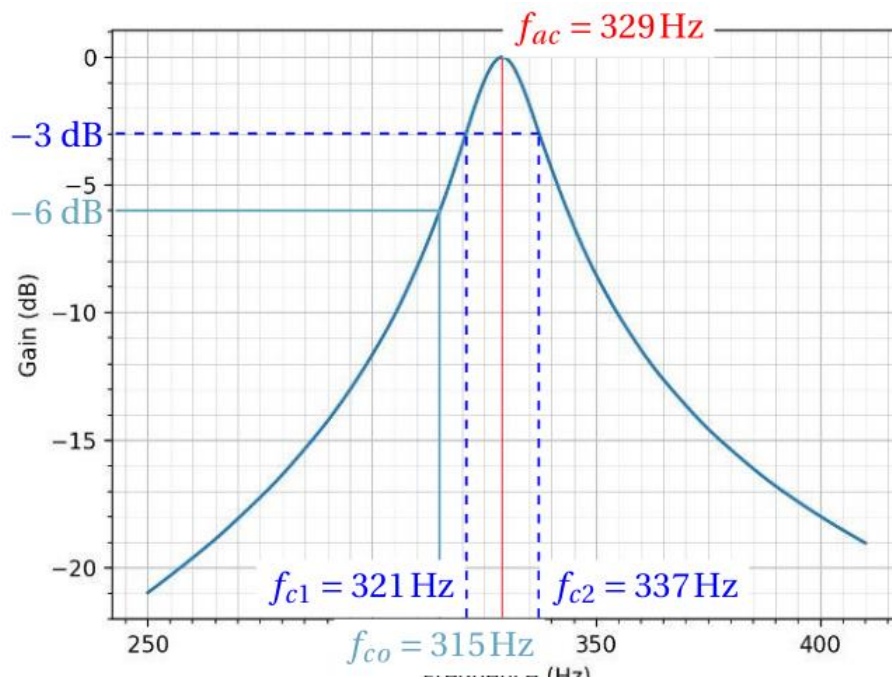
$$G_{dB}(f) > \max(G_{dB}) - 3 \text{ dB}$$

On lit ici : $BP = [321 \text{ Hz} ; 337 \text{ Hz}]$.

22) Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

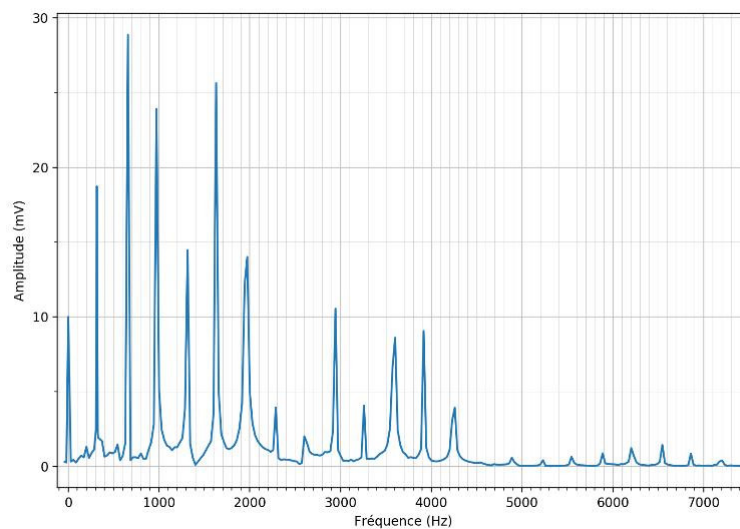
Correction

Le gain en dB pour $f_{co} = 315$ Hz est de -6 dB. La composante fondamentale est donc amplifiée d'un facteur : $10^{-6/20} = 0,5$ (atténué d'un facteur 2).



II.5) Analyse spectrale

La figure ci-dessous correspond au spectre du signal d'entrée $u_e(t)$.

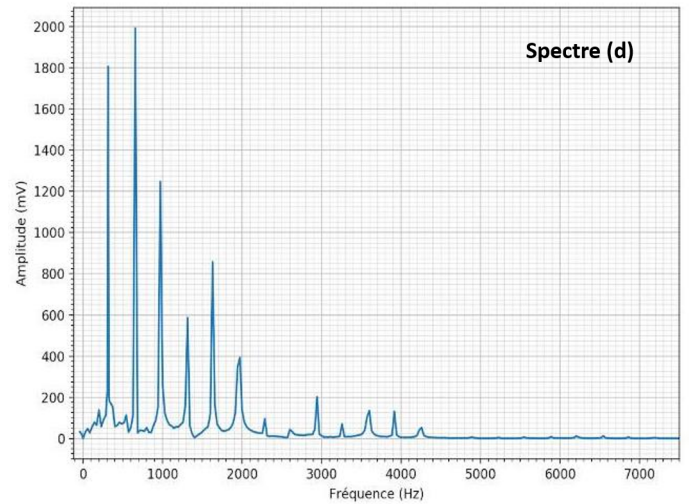
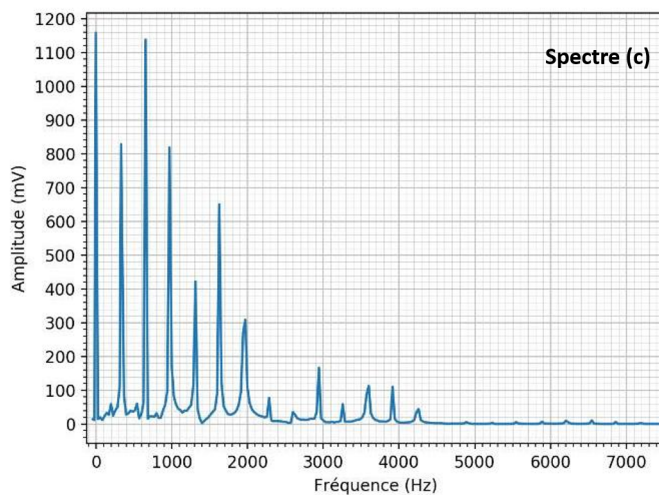
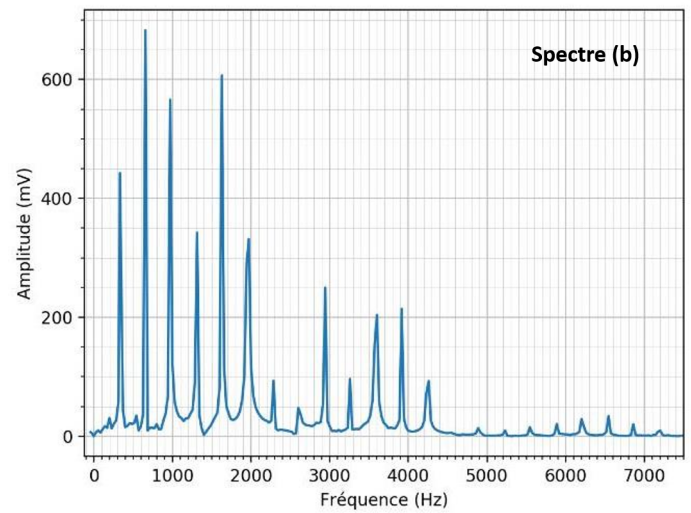
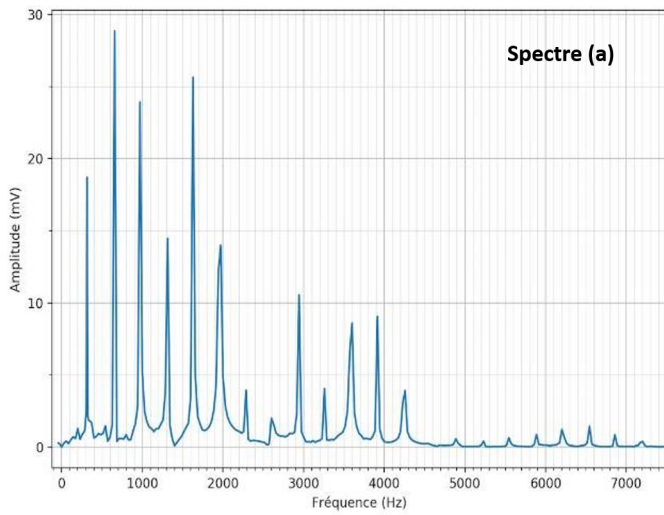


23) Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre de $u_e(t)$.

Correction

On observe un pic à fréquence nulle, d'amplitude 10 mV. Il s'agit de la composante continue (cohérent avec la question 1). Le premier pic, celui du fondamental, est situé autour de 300 Hz (cohérent avec la question 2). On observe enfin une série d'harmoniques, ce qui traduit le caractère « non sinusoïdal » du signal (cohérent avec la question 3).

Ci-dessous, on donne 4 spectres notés (a), (b), (c) et (d).



24) En justifiant soigneusement, dire parmi les 4 spectres proposés lequel correspond au signal $u_1(t)$, c'est-à-dire le signal en sortie du filtre $\mathcal{F}_1$.

Correction

On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_1$ coupe uniquement la composante continue, sans toucher aux harmoniques du spectre. Le spectre (a) vérifie cette propriété : le pic à fréquence nulle a disparu, tous les autres pics ont vu leurs amplitudes conservées.

25) Même question pour $u_2(t)$, le signal en sortie du filtre $\mathcal{F}_2$.

Correction

On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_2$ amplifie d'un facteur 100 les amplitudes des pics de fréquences inférieures à 500 Hz, et ne touche que peu aux autres fréquences. Le spectre (d) possède cette propriété.

Remarque : le spectre (c) possède encore une composante continue, il ne correspond à la sortie d'aucun filtre. Le spectre (b) est amplifié uniformément d'un facteur 10 par rapport au spectre (a). Il ne correspond à la sortie d'aucun filtre.

26) Tracer l'allure du spectre du signal $u_3(t)$ en sortie du filtre $\mathcal{F}_3$. Tracer l'allure du signal temporel correspondant.

Correction

On rappelle que le filtre $\mathcal{F}_3$ sélectionne la composante f_{ac} de manière très sélective avec un gain de 1. En effet, l'harmonique de rang 2, dont la fréquence vaut $2f_{ac} = 659,2$ Hz est atténuée de -30 dB environ, correspondant à un gain de $10^{-30/20} = 0,03$. On peut donc négliger cet harmonique. Il en va de même pour les suivants qui sont encore plus atténués.

Spectre : un seul pic à $f_{ac} = 329$ Hz et d'amplitude 1,8 V.

Signal temporel : une sinusoïde de période $1/f_{ac} = 3$ ms, de moyenne nulle et d'amplitude 1,8 V.

III) Suspension passive de voiture

Les suspensions d'un véhicule ont pour objectif principal d'assurer la meilleure tenue de route possible, de façon à garantir la sécurité des occupants.

Il existe de nombreux types de suspensions dont le rôle est notamment de contrôler le déplacement vertical d'un véhicule.

Par la suite, nous allons nous intéresser aux suspensions à ressorts disposant d'amortisseurs rhéomagnétique (figure 1). Différents éléments participent à l'amortissement mais tous les effets seront ramenés au niveau des suspensions dont seul le déplacement vertical est étudié.

L'étude est menée en référentiel galiléen et l'on note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération du champ de pesanteur.

27) Donner un exemple de référentiel galiléen. Préciser le ou les liens qui existent entre deux référentiels galiléens.

Correction

Un exemple de référentiel est le référentiel terrestre, ou « référentiel du laboratoire », lié au solide Terre supposé immobile. Il peut être considéré comme galiléen pour une expérience courte (inférieure à l'heure par exemple) dans laquelle les effets de la rotation terrestre ne se font pas sentir.

Un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen l'est lui-même.

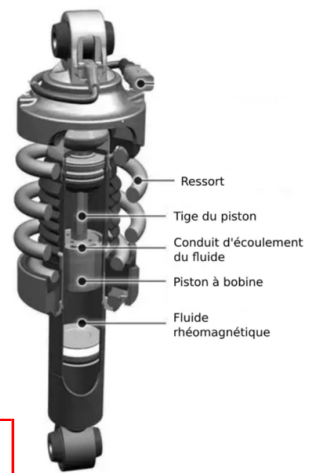


FIGURE 1 – Schéma d'une suspension à ressort

Le véhicule, de masse M , repose de façon équivalente sur quatre amortisseurs supposés identiques. On note m la masse supportée par un seul amortisseur.

28) Quelle masse m supporte un amortisseur ?

Correction

La masse M est répartie de façon équivalente sur quatre amortisseurs en parallèle, donc chaque amortisseur supporte une masse :

$$m = \frac{M}{4}$$

III.1) Suspension sans amortissement

On modélise la suspension sans amortisseurs d'une voiture par un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , sur lequel repose la masse m (figure 2)

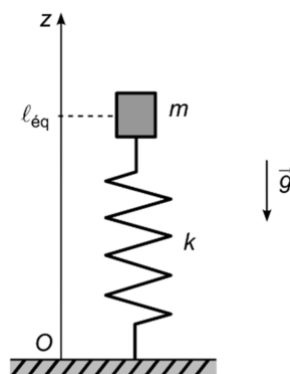


FIGURE 2 – Modélisation d'une suspension à ressort

29) Déterminer la longueur à l'équilibre du ressort, ℓ_{eq} , en fonction de g , k , ℓ_0 et de m .

Correction

On applique le PFD à l'équilibre sur m dans le référentiel terrestre galiléen :

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{el} \Rightarrow 0 = -mg - k(\ell_{eq} - \ell_0) \Rightarrow \ell_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$$

30) Donner, en fonction de k et de m , l'expression de la pulsation propre ω_0 du système. Justifier son expression par une analyse dimensionnelle.

Correction

Le système est un oscillateur harmonique, de pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

L'analyse dimensionnelle donne :

$$[\omega_0] = \sqrt{\frac{\text{Force} \cdot \text{L}^{-1}}{M}} = \sqrt{\frac{M \cdot T^{-2}}{M}} = T^{-1}$$

Il s'agit bien de l'inverse d'un temps.

Une association simple de deux ressorts peut se faire en série ou en parallèle (figure 3).

Soient deux ressorts de longueur à vide identique ℓ_0 et de constantes de raideur k_1 et k_2 . Selon l'association réalisée, la constante de raideur équivalente vaut k_s en série ou k_p en parallèle.

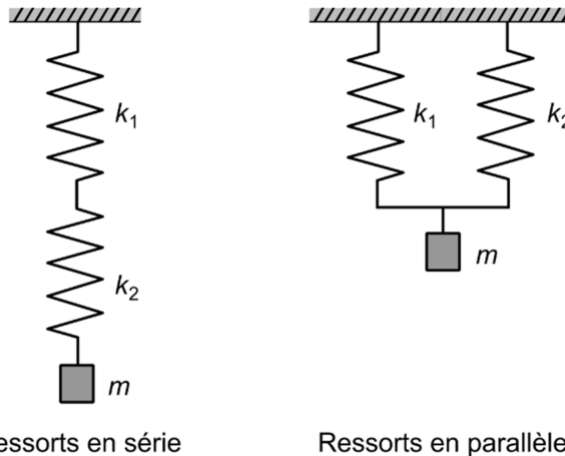


FIGURE 3 – Associations série et parallèle de deux ressorts

31) Démontrer que, pour une association de deux ressorts en parallèle, $k_p = k_1 + k_2$.

Correction

Pour une association de deux ressorts en parallèle, on peut écrire la force totale subie sous la forme :

$$\vec{F}_{tot} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -k_1(\ell - \ell_0)\vec{u}_z - k_2(\ell - \ell_0)\vec{u}_z = -\underbrace{(k_1 + k_2)}_{k_p}(\ell - \ell_0)\vec{u}_z \Rightarrow \boxed{k_p = k_1 + k_2}$$

32) Les quatre amortisseurs étant supposés identiques, donner l'expression de la constante de raideur équivalente k_v de l'ensemble du véhicule, en fonction de la constante k de l'un d'entre eux.

Correction

Pour un véhicule à 4 roues, les quatre amortisseurs sont en parallèle, donc pour l'ensemble du véhicule, la raideur équivalente est $\boxed{k_v = 4k}$

33) En déduire l'expression de la pulsation propre de la voiture Ω_0 en fonction de ω_0

Correction

Alors la pulsation propre de l'oscillateur constitué par le véhicule est :

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_v}{M}} = \sqrt{\frac{4k}{4m}} = \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$$

III.2) Suspension avec amortissement

Pour le confort des occupants du véhicule, il est préférable d'en réduire rapidement les oscillations. Pour ce faire, la suspension comporte un dispositif amortisseur (figure 4) qui exerce une force de frottement fluide.

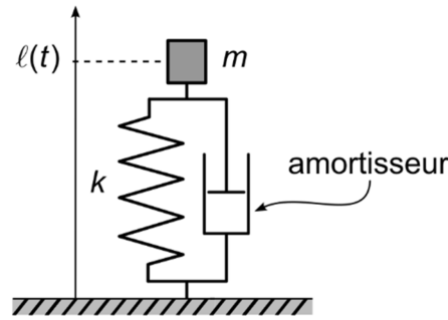


FIGURE 4 – Suspension avec amortisseur

La force de frottement fluide s'écrit :

$$\vec{F}_f = -h \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$$

avec $z(t) = \ell(t) - \ell_0 + \frac{mg}{k}$ la variable repérant la position de la masse m à partir de sa position d'équilibre.

34) Montrer que l'équation différentielle du mouvement vertical d'un amortisseur de la voiture soutenant la masse m se met sous la forme :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z(t) = 0$$

et déterminer les expressions de ω_0 et Q en fonction de k , h et de m .

Correction

On applique le PFD sur m dans le référentiel terrestre galiléen :

$$m\ddot{z} = -mg - k(\ell - \ell_0) - h\dot{z} \quad \text{avec : } \ell = z + \ell_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow m\ddot{z} = -kz - h\dot{z} \Rightarrow \ddot{z} + \frac{h}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = 0$$

On en déduit :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{km}}{h}$$

35) En déduire, en fonction de h et de m , la valeur limite k_c de k permettant le retour le plus rapide du système à sa position d'équilibre (régime critique).

Correction

La valeur limite du facteur de qualité Q donnant lieu au régime critique est $Q = 1/2$, ce qui correspond à une valeur limite

de la raideur : $k_c = \frac{h^2}{2m}$

36) À la construction du véhicule, le régime d'oscillations correspond au régime apériodique. Si l'on charge trop le véhicule, existe-t-il un risque de passer en régime pseudopériodique ?

Correction

D'après l'expression précédente, Q augmente avec la masse m . Donc une masse plus élevée (chargement du véhicule) permet au système de passer en régime pseudo-périodique ($Q > 1/2$).

L'amortisseur a été soumis à une excitation sinusoïdale de fréquence variable et l'amplitude des oscillations obtenues a été enregistrée pour différentes valeurs de m , ce qui a permis d'obtenir les courbes de résonance de la figure 5.

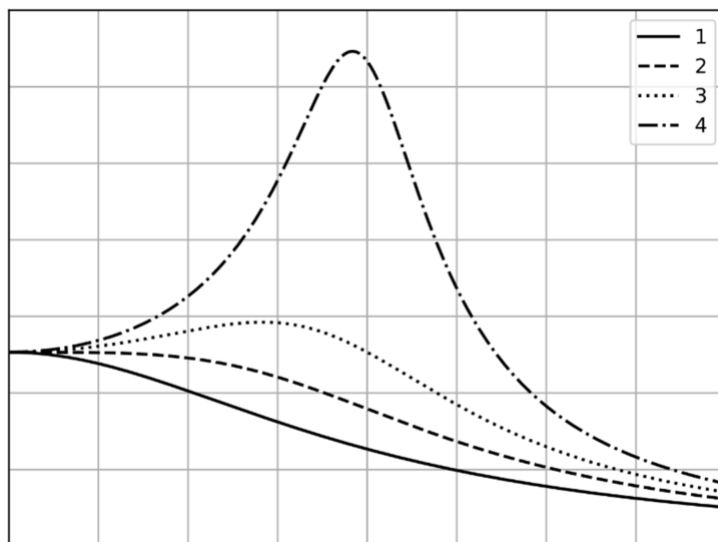


FIGURE 5 – Courbes de résonance

37) Proposer des grandeurs pour l'axe des abscisses et des ordonnées de la figure 5.

Correction

Le graphique présenté ci-dessous est un tracé de l'amplitude des oscillations (en mètres) en fonction de la fréquence d'excitation (en hertz).

38) Expliquer quelle courbe correspond à la masse la plus élevée.

Correction

La courbe correspondant à la masse la plus élevée est la courbe 4, qui correspond à la plus grande résonance, donc au facteur de qualité le plus élevé (régime pseudo-périodique).